ANATOCISMO E OS NEGACIONISTAS DE UMA CIÊNCIA EXATA!

05/03/2025 - Professor Msc. Jackson Ciro Sandrini – jcsandrini@ufpr.br

Quando publiquei o artigo **Anatocismo e a Tabela Price: de uma vez por todas!**, em 17/07/19, imaginei não ter que voltar ao assunto, dada à concretude das vastas comprovações matemático-financeiras. Entretanto, devido à insistência de que, ao pagarmos parcelas liquidamos todo juro e, por consequência, **não restam juros nos saldos devedores**, resolvi, mais uma vez, comprovar o contrário, cientificamente, por meio da exploração da robusta fórmula para cálculo da prestação constante dos sistemas; embora, **somente pelo valor do dinheiro no tempo: todo valor em data diferente da data zero contém juro,** já deveria ser suficiente!

Ainda que tenhamos dissecado no citado artigo, achamos imprescindível reforçar o conceito de anatocismo. Em qualquer lugar que se pesquise, anatocismo sempre considera juros sobre juros = juros compostos. Porém, mesmo assim, para atender a escusos interesses, certa divergência foi construída. Há duas correntes. A primeira é clássica: Anatocismo é a capitalização dos juros de uma importância emprestada, o mesmo que juro composto ou juro sobre juro.

Já a segunda corrente afirma que anatocismo nada tem a ver com o critério de formação dos juros a serem pagos ou recebidos numa determinada data; ele consiste na cobrança de juros sobre juros vencidos e não pagos. Complementa, ainda, essa corrente, que ***se os juros forem totalmente pagos, não existe a possibilidade fática de serem capitalizados e, nesses casos, o regime de juros compostos não implica anatocismo***. Entendido dessa forma, segundo esses equivocados defensores, somente existirá num sistema de amortização se as prestações não forem liquidadas no vencimento e o credor ***cobrar juros sobre os juros vencidos e não pagos.***

Ora, se na capitalização composta, no caso de empréstimo, a taxa de juro incide sobre **juros devidos e não pagos** (vencidos) e no caso de aplicação sobre **juros auferidos e não sacados** (vencidos), **parcial ou totalmente**, entende-se, claramente, que **anatocismo é a cobrança de juros sobre juros vencidos e não pagos ou sacados, fundamento da capitalização composta!**

Contudo, é oportuno esclarecer que **juros vencidos e não pagos,** intrínsecos à capitalização composta, são distintos de **juros exigidos,** de acordo com o sistema de amortização estabelecido em contrato**, e não pagos,** constituindo-se em **amortização negativa**, de tal forma que o saldo devedor, em vez de diminuir, será acrescido do juro exigido e não pago, passando a produzir novos juros nos períodos seguintes.

Cabe destacar, no entanto, que **amortização negativa** somente ocorre em razão da **convenção** que se adota nos sistemas de amortização para calcular os juros exigidos e o valor da amortização pela diferença entre a prestação e esses juros exigidos; porquanto, amortização negativa financeiramente não existe, é uma falácia, uma vez que juro e amortização compõem qualquer pagamento: se realizado na data zero, 100% é amortização e se realizado em qualquer outra data, para obter o valor da amortização basta descapitalizar o valor do pagamento para data zero, desincorporando os juros, como comprovaremos, mais uma vez, na sequência.

É importante observar que, em qualquer pagamento, há sempre juro e amortização. Em não havendo pagamento, o valor da amortização, por consequência, será zero. Certamente, então, se houver qualquer pagamento, mesmo inferior ao juro exigido, a amortização, por óbvio, não poderá ser negativa. Portanto, amortização negativa é uma irracionalidade financeira!

Saliente-se que há somente dois regimes de capitalização de juros: simples e composto, mutuamente excludentes: se não for simples, com certeza, será composto, e vice-versa. Não existe possibilidade de a capitalização composta não implicar cobrança de juros sobre juros! Então, a afirmação de que ***Anatocismo não é sinônimo de juros compostos e sim, de juros sobre juros*** não passa de uma de um delírio! Em qualquer lugar que se pesquise, juro composto é juro sobre juro; porquanto, não há outra forma de se conceituar. Em tempo: a Matemática Financeira, enquanto ciência exata, não admite polêmica e não tolera desaforo!

A Matemática Financeira é uma ciência exata; porém, não óbvia, que trata do valor do dinheiro no tempo. Enfatize-se que, financeiramente, dois mais dois não são quatro: depende da data em que se encontram e somente serão quatro se estiverem na mesma data. Valores de uma mesma data são grandezas que podem ser somadas ou subtraídas; todavia, valores em datas diferentes são grandezas que somente podem ser somadas ou subtraídas depois de transportadas para uma data comum (focal), capitalizando ou descapitalizando, conforme o caso, por meio da aplicação de uma taxa de juros ou de desconto, por um determinado prazo.

Para comparar alternativas de fluxo de caixa, com valores de entradas e saídas exigidos em datas distintas, somente se considera esses valores equivalentes quando, transportados para uma mesma data focal, com determinada taxa de juros, tiverem valores de entradas e saídas iguais, zerando o fluxo de caixa. À equação resultante dessa igualdade, dá-se o nome de **equação de valor**.

Capitalizar juros significa incorporar juros ao capital (VP = valor na data zero), de forma simples ou de forma composta, tornando-se um único corpo, **indissociável**, denominado montante (VF = valor em qualquer data posterior à data zero):

$$J_{simples} = C \times i \times n \quad \Rightarrow \quad M = C - J \quad \Rightarrow \quad M_{simples} = C \times (1 + i \times n)$$

$$M_{composto} = C \times (1+i)^n \quad \Rightarrow \quad J = M - C \quad \Rightarrow J_{composto} = C \times [(1+i)^n - 1]$$

Como se observa, na capitalização simples os juros são calculados proporcionalmente e incorporados ao capital (valor presente) uma única vez, no vencimento, independentemente da taxa e do prazo. Portanto, exige um único período de capitalização: vence a termo e não admite fracionamento de prazo: VP e VF não são cindíveis.

Já na capitalização composta, como se observa, os juros são calculados exponencialmente e incorporados ao capital (valor presente), periodicamente. Portanto, exige mais de um período de capitalização: não vence a termo e exige fracionamento de prazo (n >1): o valor presente e o valor futuro são, obrigatoriamente, cindíveis.

Descapitalizar juros, por consequência, é o inverso: desincorporar juros do montante (valor futuro), para obter o capital (valor presente = amortização):

$$C = \frac{M_{simples}}{(1 + i \times n)} \quad \Rightarrow \quad D = M - C \quad \Rightarrow \quad D_{simples} = M \times \left[1 - \frac{1}{(1 + i \times n)}\right]$$

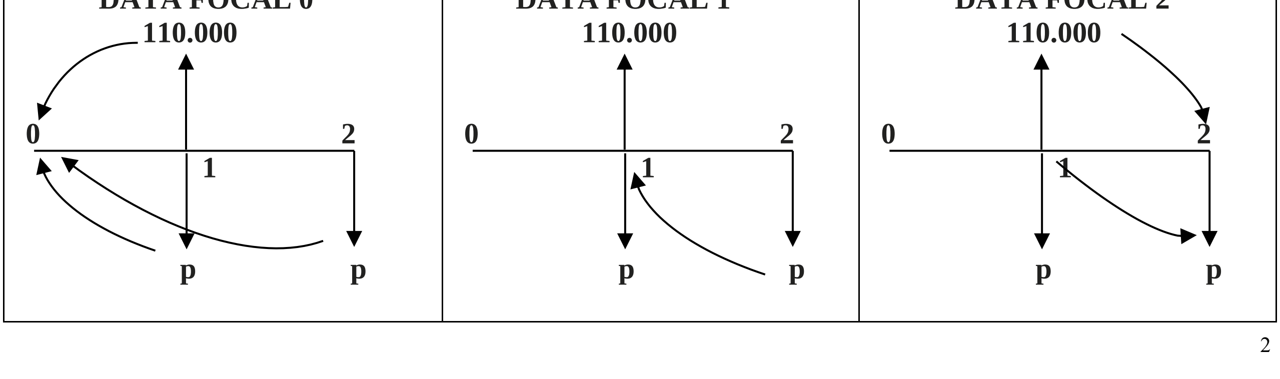
$$C = \frac{M_{composto}}{(1+i)^n} \quad \Rightarrow \quad D = M - C \quad \Rightarrow \quad D_{composto} = M \times \left[1 - \frac{1}{(1+i)^n}\right]$$

Convém, no entanto, destacar que os valores do desconto racional e do juro são iguais, diferenciando-se, apenas, conceitualmente; porquanto, nos dois casos, a taxa incide sobre o mesmo valor presente (capital), além de o prazo decorrido (juro) e o prazo de antecipação (desconto) serem iguais . Em consequência, o capital será igual ao valor atual (valor presente) e o montante igual ao valor nominal (valor futuro).

Como se observa, na capitalização simples os juros são desincorporados do montante (valor futuro) uma única vez, independentemente da taxa e do prazo. Portanto, exige um único período de descapitalização: vence a termo e não aceita fracionamento de prazo: o valor presente e o valor futuro não são cindíveis.

Já na capitalização composta, como se observa, os juros são desincorporados do montante, periodicamente. Portanto, exige mais de um período de descapitalização: não vence a termo e exige fracionamento de prazo: o valor presente e o valor futuro são, obrigatoriamente, cindíveis.

Para elucidar, tomemos o seguinte exemplo: um empréstimo de $ 100.000,00 foi realizado a juros de 10% ao mês, para ser liquidado um mês depois; portanto, por meio de um pagamento de $ 110.000,00. No vencimento, por falta de condições financeiras, o devedor propõe liquidar a dívida em dois pagamentos mensais e iguais, primeiro, de imediato, e o segundo um mês depois. Qual o valor dessas duas prestações mensais e constantes?



DATA FOCAL ZERO – JUROS COMPOSTOS

$$\frac{110.000}{(1+10\%)^1}=\frac{p}{(1+10\%)^1}+\frac{p}{(1+10\%)^2}\Rightarrow p=\frac{121.000}{2,10}=57.619,05$$

DATA FOCAL UM – JUROS COMPOSTOS

$$110.000=p+\frac{p}{(1+10\%)^1}\Rightarrow p=\frac{121.000}{2,10}=57.619,05$$

DATA FOCAL DOIS – JUROS COMPOSTOS

$$110.000\times(1+i)^1=p\times(1+i)^2+p\Rightarrow\frac{121.000}{2,10}=57.619,05$$

Como se percebe, **na capitalização composta**, o empréstimo de \$ 100.000,00 deverá ser liquidado em duas prestações mensais e iguais a \$ 57.619,05, em 1 e 2 meses, considerando a taxa efetiva mensal de 10%, qualquer que seja a data focal adotada.

Ao executarmos os cálculos, adotando as três datas focais requeridas e eliminando os denominadores, constata-se que na capitalização composta as equações de valor e, por conseguinte os resultados = valor presente ÷ soma dos fatores de descapitalização, são rigorosamente iguais. Essa igualdade ocorre porque a capitalização composta, diferentemente da simples, exige o fracionamento de prazo; portanto, mais de um período de capitalização: **os valores podem ser resgatados ou liquidados a qualquer momento,** pois que, não vencem a termo, como na capitalização simples.

Como restou cientificamente comprovado, na capitalização composta, diferentemente da capitalização simples, ao se colocar o montante de certo capital C, calculado à taxa i e para um prazo n_1, à mesma taxa i e por um prazo n_2, o montante final será idêntico ao montante calculado considerando o capital C colocado à mesma taxa i, durante o prazo total $\mathbf{n = n_1 + n_2}$, como se ratifica ao aplicarmos a propriedade de multiplicação de potências de mesma base: conservamos a base e somamos os expoentes:

$$\mathbf{C\times\left(1+i\right)^{n}=C\times\left(1+i\right)^{n_1}\times\left(1+i\right)^{n_2}}$$

Conclui-se, por conseguinte, que a equivalência financeira entre valores monetários, no regime de juros compostos, pode ser efetivada em qualquer data focal; porquanto, qualquer que seja a data focal definida caracterizará juro composto, com a incidência de taxa de juros sobre um valor que já contém juro (montante), como ficou matematicamente comprovado, ao efetivarmos a equivalência nas datas focais zero, um e dois.

DATA FOCAL ZERO – JUROS SIMPLES

$$\frac{110.000}{(1+10\%\times1)}=\frac{p}{(1+10\%\times1)}+\frac{p}{(1+10\%\times2)}\Rightarrow p=\frac{100.000}{1,7424}\Rightarrow 57.391,30$$

DATA FOCAL UM – JUROS SIMPLES

$$110.000=p+\frac{p}{(1+10\%\times1)}\Rightarrow 100.000\times(1+10\%)^2=(1+10\%)p+p\Rightarrow p=\frac{121.000}{2,10}\Rightarrow 57.619,05$$

DATA FOCAL DOIS – JUROS SIMPLES

$$110.000\times(1+10\%\times1)=(1+10\%\times1)p+p\Rightarrow 100.000\times(1+10\%)^2=(1+10\%)p+p\Rightarrow p=\frac{121.000}{2,10}\Rightarrow 57.619,05$$

Como se percebe, na capitalização simples, o empréstimo de \$ 100.000,00 deverá ser liquidado em duas prestações mensais e iguais a \$ 57.391,30, em 1 e 2 meses, considerando a taxa mensal de 10% = valor presente ÷ soma dos fatores de descapitalização; porquanto, nas outras duas datas focais, os valores são idênticos aos da capitalização composta; portanto, não são simples, ratificados, inclusive, pelo surgimento do fator $\mathbf{(1+i)^2}$.

Ao executarmos os cálculos nas três datas focais requeridas, na capitalização simples, constata-se que a única data em que a taxa de juros não incidirá sobre um valor que já contém juro (o montante); portanto, juros sobre juros, caracterizado pelo fator $(1+10\%)^2$, é a data zero, quando incide somente sobre o capital (valor presente).

Essa disparidade ocorre porque na capitalização simples o capital não é cindível: os juros vencem a termo, não sendo admissível fracionar o prazo da aplicação ou empréstimo, porque exige um único período de capitalização: os valores têm de ser resgatados ou liquidados de uma só vez, no vencimento, caracterizando uma única operação.

Convém ressaltar, no entanto, que o regime de juros simples, diferentemente do regime de juros compostos, não permite pagamento de partes do capital de $ 100.000,00, por não admitir o fracionamento de prazo: o valor presente e o valor futuro não são cindíveis. Logo, não há como fazer um único empréstimo para ser liquidado em mais de uma parcela.

Entretanto, aplicando-se o conceito de equivalência, pode-se considerar como se fossem dois empréstimos distintos: $ 52.173,91 e $ 47.826,09, liquidados a termo: 1 e 2 meses, respectivamente, cujos montantes de juros simples seriam iguais a $ 57.391,30 cada e a soma de seus valores na data zero (amortizações), por óbvio, será igual ao valor de $ 100.000,00, como se fosse um único empréstimo.

Como restou cientificamente comprovado, na capitalização simples, ao se colocar o montante de certo capital C, calculado à taxa i e para um prazo $\mathbf{n_1}$, à mesma taxa i e por um prazo $\mathbf{n_2}$, o montante final será diferente do calculado considerando o capital C colocado à mesma taxa i, no prazo total $\mathbf{n = n_1 + n_2}$.

$$\mathbf{C \times (1+ i \times n) \neq C \times (1+ i \times n_1) \times (1+ i \times n_2)}$$

É importante observar que, ao se proceder à equivalência nas datas focais **1** e **2**, está se acrescentando juro sobre um valor que já contém juro (montante), descaracterizando a capitalização simples, cuja incidência da taxa se dá apenas sobre o capital (amortização): valor na data zero. Saliente-se que $\mathbf{(1+ i)^n}$ **é fator de capitalização e** quando n>1 **a capitalização é composta.** Portanto, $\mathbf{(1+ i)^2} = (1+i) \times (1+i)$, por óbvio, **caracteriza a incidência de juro sobre juro.**

Logo, é instantâneo inferir que somente não caracterizará juro sobre juro quando a taxa incidir sobre o capital (amortização), valor que se encontra na **data focal zero, única data em que um valor não contém juros**; porquanto, em qualquer outra data, a taxa incidirá sobre um valor que já contém juro (montante): haverá juro, da data zero até essa outra data, ratificando o fundamento do valor do dinheiro no tempo.

Conclui-se, por conseguinte, que a **equivalência financeira entre valores monetários no regime de juros simples deve ser efetivada, obrigatoriamente, adotando-se a data zero como focal;** porquanto, qualquer outra data definida como focal caracterizará juro composto, com a taxa de juro incidindo sobre um valor que já contém juro = juro sobre juro, como ficou matematicamente comprovado, ao efetivarmos a equivalência nas datas focais um e dois, com o surgimento do fator de capitalização composta $\mathbf{(1+ i)^2}$.

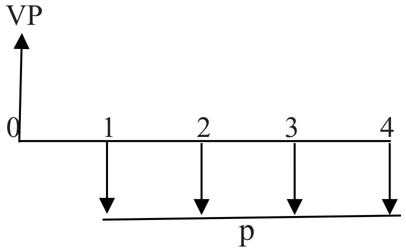
Então, quando a taxa de juros incide somente sobre o capital ou parte dele (amortização), o regime de capitalização é simples, e quando a taxa de juros incide sobre qualquer outro valor que não esteja na data zero a capitalização será composta; pois, a taxa estará incidindo sobre montante.

É importante realçar que o fundamento da matemática financeira é o valor do dinheiro no tempo (VDT): se um valor estiver em data posterior à data zero conterá juro = montante. Por conseguinte, os valores dos pagamentos e dos saldos devedores contêm juros: são sempre montantes, e os valores das amortizações (capitais) estão sempre na data zero, razão de podermos somá-los. Então, facilmente, se conclui que **quaisquer sistemas de amortização em que a taxa de juros incida sobre os saldos devedores, a capitalização dos juros será composta: anatocismo.**

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE – FRANCÊS (PRICE)

Adotando como exemplo um empréstimo de $ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, à taxa de juros compostos de 10% ao mês, elaborar a planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



$$VP = \frac{p}{(1+i)^1} + \frac{p}{(1+i)^2} + \frac{p}{(1+i)^3} + \frac{p}{(1+i)^4}$$

Como o valor de p é comum, colocamos em evidência (fatoramos) e obtemos:

$$VP = p \times \left[\frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^2} \frac{1}{(1+i)^1} \right]$$

Conclui-se, por conseguinte, que o valor presente e o valor da prestação poderão ser obtidos pela multiplicação do valor da prestação e pela divisão do valor presente (capital), ambos pelo somatório dos fatores de descapitalização em juros compostos, respectivamente:

$$VP = p \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j} \quad \Rightarrow \quad p = VP \div \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i)^j}$$

Entretanto, como se observa, entre colchetes temos a soma dos termos de uma progressão geométrica:

$$S_{PG} = a_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

Aplicando a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica limitada, de razão igual a $(1+i)^1$, teremos:

$$VP = p \times \frac{[1 - (1+i)^{-n}]}{i} \quad \Rightarrow \quad p = VP \times \frac{i}{[1 - (1+i)^{-n}]}$$

Considerando que se tem duas inversões, além de expoente negativo, há certa preferência em adotar outra fórmula, resultado da multiplicação do numerador e do denominador por $(1+i)^{\mathbf{n}}$:

$$VP = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \quad \Rightarrow \quad p = VP \times \frac{[(1+i)^n \times i]}{[(1+i)^n - 1]}$$

Então, calculando o valor da prestação constante, teremos:

$$p = \frac{100.000}{3{,}169865} \Rightarrow p = 100.000 \times \frac{10\%}{[1 - (1+10\%)^{-4}]} \Rightarrow p = 100.000 \times \frac{[(1+10\%)^4 \times 10\%]}{[(1+10\%)^4 - 1]} = 31.547{,}08$$

Antes de tudo, é importante observar que essa fórmula já responde, cientificamente, que o montante de juros compostos de um empréstimo de \$ 100.000,00 é igual ao montante das quatro parcelas mensais de \$ 31.547,08, fazendo-nos concluir que essas parcelas se dão a juros compostos. Por óbvio, se demonstra, categoricamente, que o Sistema Francês de Amortização – Price capitaliza juros de forma composta: juros sobre juros:

$$VP = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \Rightarrow \frac{VF}{(1+i)^n} = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{[(1+i)^n \times i]} \quad \therefore \quad VF = p \times \frac{[(1+i)^n - 1]}{i}$$

$$100.000 \times (1+10\%)^4 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^4 - 1]}{10\%} = 146.410{,}00$$

Como se verifica, tanto faz liquidar um empréstimo de \$ 100.000,00, quatro meses depois, com pagamento único de \$ 146.410,00, ou em 4 prestações mensais e iguais a \$ 31.547,08; pois, a juros compostos de 10% ao mês, serão equivalentes, em qualquer data focal. Então, a afirmação de que ***o Sistema Francês – Price capitaliza juros simples; porque, o total de juros pagos nesse sistema é \$ 26.188,32, menor que o total de juros compostos de \$ 46.410,00***, é simplesmente, absurda; pois, compara valores em datas diferentes. Aliás, é tão absurda que esse total também é menor que o total de juros simples, com pagamento único de \$ 140.000,00.

Nesse referido Sistema Francês de Amortização – Price, depois de obtido o valor da prestação constante mensal, calculamos, **por convenção**, o juro, por meio da incidência da taxa periódica sobre o saldo devedor anterior, a amortização pela diferença entre a prestação e o respectivo juro e, por fim, o saldo devedor pela diferença entre o saldo devedor anterior e a amortização do período, depois, montamos a planilha:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR
0				100.000,00
1	31.547,08	10.000,00	21.547,08	78.452,92
2	31.547,08	7.845,29	23.701,79	54.751,13
3	31.547,08	5.475,11	26.071,97	28.679,16
4	31.547,08	2.867,92	28.679,16	0,00
∑	**126.188,32**	**26.188,32**	**100.000,00**	

Contudo, caso o devedor decida pagar a primeira prestação um mês antes, certamente, o credor jamais aceitará retirar \$ 10.000,00 de juros e receber \$ 21.547,08; porquanto, os juros contidos na primeira prestação é o quarto (último), no valor de \$ 2.867,92, e o credor deverá receber o valor correto de \$ 28.679,16, demonstrando que o Sistema Francês de Amortização, **financeiramente, é imperfeito**; porém, cabe salientar, que a separação da prestação em juros e amortização serve, apenas, para atender à uma questão fisco-contábil.

Então, como se constata, ao adotarem a **convenção de calcular os juros exigidos sobre o saldo devedor anterior e considerá-los totalmente pagos, incorrem num grave erro conceitual**; pois, o valor desses **juros exigidos** ocorre de forma invertida aos **juros devidos**, calculados, corretamente por equivalência financeira e, embora não altere o fluxo de caixa (prestações e saldos devedores), os **juros exigidos** nos sistemas usuais de amortizações não expressam a realidade e se tornam, financeiramente, insustentáveis, ao longo do tempo!

Na sequência, demonstraremos como calcular os elementos e elaborar a planilha de amortização de forma correta, financeiramente, considerando o valor do dinheiro no tempo, sustentáculo da matemática financeira.

Primeiramente, percebemos que, financeiramente, o cálculo do saldo devedor depende do valor do saldo devedor anterior (quanto se deve) e da prestação (quanto se paga); aliás, é o que interessa para o tomador do empréstimo e independe de como se separa a prestação em juros e amortização.

n	SD ANTES	PRESTAÇÃO	SD DEPOIS
0			100.000,00
1	110.000,00	31.547,08	78.452,92
2	86.298,21	31.547,08	54.751,13
3	60.226,24	31.547,08	28.679,16
4	31.547,08	31.547,08	0,00

Como se verifica, depois de calcularmos o valor da prestação constante, teremos, ao final do primeiro período uma dívida de \$ 110.000,00, que é o valor do empréstimo (saldo devedor zero), capitalizado um período, quando, então, pagaremos a primeira prestação e, por estar na mesma data focal, simplesmente, subtraímos o valor da prestação para obter o saldo devedor de \$ 78.452,92. E, assim, sucessivamente, como se comprova:

$$SD_1 = SD_0 \times (1+i) - p \Rightarrow SD_1 = 100.000 \times (1+10\%) - 31.547,08 \Rightarrow 78.452,92$$

$$SD_2 = SD_1 \times (1+i) - p \Rightarrow SD_2 = [SD_0 \times (1+i) - p] \times (1+i) - p \therefore SD_2 = SD_0 \times (1+i)^2 - 2,10 \times p$$

$$SD_2 = [100.000 \times (1+10\%)^2 - 2{,}10 \times 31.547{,}08 \Rightarrow 54.751{,}13$$

$$SD_3 = SD_2 \times (1+i) - p \Rightarrow SD_3 = [SD_0 \times (1+i)^2 - 2{,}10 \times p] \times (1+i) - p \therefore SD_3 = SD_0 \times (1+i)^3 - 3{,}31 \times p$$

$$SD_3 = [100.000 \times (1+10\%)^3 - 3{,}31 \times 31.547{,}08 \Rightarrow 28.679{,}16$$

$$SD_4 = SD_3 \times (1+i) - p \Rightarrow SD_4 = [SD_0 \times (1+i)^3 - 3{,}31 \times p] \times (1+i) - p \therefore SD_3 = SD_0 \times (1+i)^4 - 4{,}641 \times p$$

$$SD_3 = [100.000 \times (1+10\%)^4 - 4{,}641 \times 31.547{,}08 \Rightarrow 0$$

Nota-se, com certa facilidade, a incidência da taxa de juros sobre juros (anatocismo), com o surgimento de $(1+10\%)^2$, $(1+10\%)^3$, $(1+10\%)^4$, comprovando, cientificamente, que os saldos devedores contêm juros, **fulminando a falsa narrativa** de que ***ao pagarmos as prestações estamos liquidando todo juro e, por consequência, não restam juros nos saldos devedores***.

Além disso, é importante ressaltar que os saldos devedores são, também, o valor presente das parcelas vincendas (parcelas a pagar): diferença entre todas as parcelas (n) e as parcelas pagas (t), como se comprova:

$$SD_t = p \times \frac{[(1+i)^{(n-t)} - 1]}{[(1+i)^{(n-t)} \times i]}$$

$$SD_1 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^{(4-1)} - 1]}{[(1+10\%)^{(4-1)} \times 10\%]} \Rightarrow 78.452{,}92$$

$$SD_2 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^{(4-2)} - 1]}{[(1+10\%)^{(4-2)} \times 10\%]} \Rightarrow 54.751{,}13$$

$$SD_3 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^{(4-3)} - 1]}{[(1+10\%)^{(4-3)} \times 10\%]} \Rightarrow 28.679{,}16$$

$$SD_4 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^{(4-4)} - 1]}{[(1+10\%)^{(4-4)} \times 10\%]} \Rightarrow 0$$

Honestamente, não há como negar que os saldos devedores contêm juros, mesmo realizando grande esforço nas falaciosas narrativas!

Ademais, é importante realçar que os saldos devedores são, também, o valor presente das parcelas a pagar (vincendas), na data zero (saldo devedor), capitalizado até a data pretendida, como se comprova:

$$SD_t = p \times \frac{[(1+i)^{(n-t)} - 1]}{[(1+i)^{(n-t+t)} \times i]} \times (1+i)^t \Rightarrow SD_t = p \times \frac{[(1+i)^{(n-t)} - 1]}{[(1+i)^{(n-t)} \times i]}$$

Como se observa, ao fazermos a devida simplificação, acabamos ratificando a demonstração anterior, culminando na comprovação, mais uma vez, de que os saldos devedores contêm juros, como sói acontecer!

Cabe ressaltar, ainda, que os saldos devedores são, também, a diferença entre o valor do empréstimo e o valor presente das amortizações (parcelas pagas), constituindo-se no saldo devedor na data zero, capitalizado até a data pretendida, como se comprova:

$$SD_1 = \left[100.000 - \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^1}\right] \times (1+10\%)^1 \quad \Rightarrow \quad 78.452{,}92$$

$$SD_2 = \left[100.000 - \left(\frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^1} + \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^2}\right)\right] \times (1+10\%)^2 \quad \Rightarrow \quad 54.751{,}13$$

$$SD_3 = \left[100.000 - \left(\frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^2} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^3}\right)\right] \times (1+10\%)^3 \quad \Rightarrow \quad 28.679,16$$

$$SD_4 = \left[100.000 - \left(\frac{31.547,08}{(1+10\%)^1} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^2} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^3} + \frac{31.547,08}{(1+10\%)^4}\right)\right] \times (1+10\%)^4 \quad \Rightarrow \quad 0$$

Honestamente, com tantas comprovações científicas, não há como negar que os saldos devedores contêm juros, mesmo realizando grande esforço nas tolices dos negacionistas!

Então, a narrativa de que, ***ao liquidarmos a prestação, pagamos totalmente os juros e que nos saldos devedores não há juros*** é completamente falsa, caindo por terra o argumento de que não há a incidência de **juros sobre juros: anatocismo,** quando a taxa de juros incide sobre os saldos devedores.

Ressalte-se: depois de incorporados, somente liquidamos integralmente os juros quando liquidamos integralmente o empréstimo. Caso contrário, sempre restarão juros nos saldos devedores; pois, pagamos montantes (juros e amortização) e restam montantes (capital + juros).

É importante frisar, como se observa, que as comprovações servem para qualquer sistema de amortização em que a taxa de juros incida sobre os saldos devedores. Entretanto, é oportuno lembrar que todos os saldos devedores contêm juros (VDT); **inclusive, nos sistemas de amortização em juros simples**; porém, por óbvio, nesses sistemas, a taxa não incide sobre os saldos devedores e, sim, sobre as parcelas de capital (amortização), como demonstraremos. na sequência.

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores contêm juros; pois, são os montantes dos saldos devedores na data zero, vamos calcular os valores das amortizações efetivamente realizadas, tomando como base esses mesmos saldos devedores.

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da primeira prestação (SD_1), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira amortização. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor será o valor da primeira amortização, por óbvio:

$$A_1 = 100.000 - \frac{78.452,92}{(1+10\%)^1} \Rightarrow 28.679,16$$

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da segunda prestação (SD_2), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira e segunda amortizações. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzindo a primeira amortização (A_1), será o valor da segunda amortização, por óbvio:

$$A_2 = 100.000 - \frac{54.751,13}{(1+10\%)^2} - 28.679,16 \Rightarrow 26.071,97$$

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da terceira prestação (SD_3), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira, segunda e terceira amortizações. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzindo as amortizações anteriores, será o valor da terceira amortização, por óbvio:

$$A_3 = 100.000 - \frac{28.679,16}{(1+10\%)^3} - 28.679,16 - 26.071,97 \Rightarrow 23.701,79$$

Como o saldo devedor depois do pagamento da última prestação (SD_4) deve ser zero, o valor da quarta e última amortização será a diferença entre o valor do empréstimo e as amortizações anteriores:

$$A_4 = 100.000 - 28.679,16 - 26.071,97 - 23.701,79 \Rightarrow 21.547,08$$

Além disso, aproveitando que todos já devem ter entendido que amortização é capital ou parte do capital (valor presente), é importante salientar que, por meio da própria fórmula para cálculo do valor presente dos pagamentos realizados, podemos obter os valores de cada amortização, depois de deduzidas as amortizações havidas, ratificando os cálculos anteriores, como se comprova:

$$A_1 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^1 - 1]}{[(1+10\%)^1 \times 10\%]} \Rightarrow 28.679{,}16$$

$$A_2 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^2 - 1]}{[(1+10\%)^2 \times 10\%]} - 28.679{,}16 \Rightarrow 26.071{,}97$$

$$A_3 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^3 - 1]}{[(1+10\%)^3 \times 10\%]} - 28.679{,}16 - 26.071{,}97 \Rightarrow 23.701{,}79$$

$$A_4 = 31.547{,}08 \times \frac{[(1+10\%)^4 - 1]}{[(1+10\%)^4 \times 10\%]} - 28.679{,}16 - 26.071{,}97 - 23.701{,}79 \Rightarrow 21.547{,}08$$

Para que fique mais clarividente, ainda, vamos pegar a própria fórmula para cálculo do valor presente e comprovar, mais uma vez, o valor dos juros e das amortizações constantes em cada parcela:

$$VP = p \times \frac{\left[1 - (1+i)^{-1}\right]}{i} \Rightarrow i \times VP = p - \frac{p}{(1+i)^n} \therefore i \times SD_0 = p - \frac{p}{(1+i)^n} \Rightarrow i \times SD_1 = p - \frac{p}{(1+i)^{(n\text{-}1)}} \cdots$$

Fica evidente que a multiplicação da taxa pelo valor do empréstimo (SD_0) é o juro contido na última prestação (4ª prestação) e não na primeira, como **calculada por convenção no Sistema Francês - Price** e, assim por diante, como se comprova na sequência. Da mesma forma, é importante lembrar que **juro é a diferença entre prestação e respectiva amortização**; então, a fórmula nos revela que $\mathbf{p \div (1+i)^n}$ é o valor da 4ª (última) amortização; $\mathbf{p \div (1+i)^{n-1}}$ é o valor da 3ª amortização (penúltima); $\mathbf{p \div (1+i)^{n-2}}$ é o valor da 2ª amortização e p ÷ $\mathbf{(1+i)^{n-3}}$ é o valor da 1ª amortização, valores inversos aos da convenção, como se comprova:

$$10\% \times 100.000{,}00 = 31.547{,}08 - \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^4} \therefore J_4 = p - A_4 \Rightarrow J_4 = p - 21.547{,}08 \Rightarrow 10.000{,}00$$

$$10\% \times 78.452{,}92 = 31.547{,}08 - \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^{4\text{-}1}} \therefore J_3 = p - A_3 \Rightarrow J_3 = p - 23.701{,}79 \Rightarrow 7.845{,}29$$

$$10\% \times 54.751{,}13 = 31.547{,}08 - \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^{4\text{-}2}} \therefore J_2 = p - A_2 \Rightarrow J_2 = p - 26.071{,}97 \Rightarrow 5.475{,}11$$

$$10\% \times 28.679{,}16 = 31.547{,}08 - \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^{4\text{-}3}} \therefore J_1 = p - A_1 \Rightarrow J_1 = p - 28.679{,}16 \Rightarrow 2.867{,}92$$

Como se percebe, com certa facilidade, quando descapitalizamos o valor da prestação, desincorporando os juros, estamos calculando o valor da respectiva amortização: **conclusão aplicável em qualquer sistema de amortização, inclusive em juros simples.**

Ressalte-se que os juros, também, podem ser calculados sobre o valor de cada amortização, ratificando que podemos considerar como se fossem 4 empréstimos distintos, cujos montante são os valores das prestações:

$$J_1 = 28.679{,}16 \times [(1+10\%)^1 \text{ -}1] \Rightarrow 2.867{,}92 \therefore M_1 = 28.679{,}16 + 2.867{,}92 \Rightarrow 31.547{,}08$$

$$J_2 = 26.071{,}97 \times [(1+10\%)^2 \text{ -}1] \Rightarrow 5.475{,}11 \therefore M_2 = 26.071{,}97 + 5.475{,}11 \Rightarrow 31.547{,}08$$

$$J_3 = 23.701{,}79 \times [(1+10\%)^3 - 1] \Rightarrow 7.845{,}29 \ \therefore\ M_3 = 23.701{,}79 + 7.845{,}29 \Rightarrow 31.547{,}08$$

$$J_4 = 21.547{,}08 \times [(1+10\%)^4 - 1] \Rightarrow 10.000{,}00 \ \therefore\ M_4 = 21.547{,}08 + 10.000{,}00 \Rightarrow 31.547{,}08$$

Fica muito claro, então, que realizar um único empréstimo de $ 100.000,00 é igual a realizar quatro empréstimos distintos de $ 25.180,64, $ 25.832,26, 23.845,16 e 22.141,94; porquanto, em ambos os casos, pagaremos quatro prestações mensais e iguais a $ 31.547,08, qualquer que seja a data focal.

Para que fique mais clarividente, ainda, vamos pegar a outra fórmula para cálculo do valor presente e comprovar, mais uma vez, o valor dos juros e das amortizações constantes em cada parcela:

$$i \times SD_0 = \frac{p}{(1+i)^n} \times [(1+i)^n - 1] \Rightarrow 10\% \times 100.000{,}00 = \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^4} \times [(1+10\%)^4 - 1] \Rightarrow J_4 = 10.000{,}00$$

$$i \times SD_1 = \frac{p}{(1+i)^{n-1}} \times [(1+i)^{n-1} - 1] \Rightarrow 10\% \times 78.452{,}92 = \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^3} \times [(1+10\%)^3 - 1] \Rightarrow J_3 = 7.845{,}29$$

$$i \times SD_2 = \frac{p}{(1+i)^{n-2}} \times [(1+i)^{n-2} - 1] \Rightarrow 10\% \times 54.751{,}13 = \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^2} \times [(1+10\%)^2 - 1] \Rightarrow J_2 = 5.475{,}11$$

$$i \times SD_3 = \frac{p}{(1+i)^{n-3}} \times [(1+i)^{n-3} - 1] \Rightarrow 10\% \times 28.679{,}16 = \frac{31.547{,}08}{(1+10\%)^1} \times [(1+10\%)^1 - 1] \Rightarrow J_1 = 2.867{,}92$$

Fica, mais uma vez, evidente que a multiplicação da taxa pelo SD_0 (valor do empréstimo) é o juro contido na 4ª prestação (última) e não na primeira, a multiplicação da taxa pelo SD_1 é o juro contido na 3ª prestação (penúltima) e não na segunda, como calculada por convenção no Sistema Francês - Price e, assim por diante.

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE EM JUROS COMPOSTOS – EQUIVALÊNCIA (VDT)

Em consequência, tendo todos os elementos por meio da fórmula em que calculamos o valor das prestações, revela-se muito simples montar a planilha de amortização do **Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos - SPCJC (VDT),** evidenciando que não há prioridade entre juros e amortização; pois, além de serem pagos, concomitantemente, fica a critério de cada um calcular, primeiramente, o juro ou a amortização:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR
0				100.000,00	
1	31.547,08	2.867,92	28.679,16	78.452,92	0,909091
2	31.547,08	5.475,11	26.071,97	54.751,13	0,826446
3	31.547,08	7.845,29	23.701,79	28.679,16	0,751315
4	31.547,08	10.000,00	21.547,08	0,00	0,683013
∑	**126.188,32**	**26.188,32**	**100.000,00**		**3,169865**

Oportuno constatar que o valor das prestações, também, pode ser obtido pela divisão do valor do empréstimo pelo somatório dos fatores de descapitalização, como somos obrigados a realizar na capitalização simples.

Nota-se, com muita facilidade, que o valor de cada **amortização** é, também, **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**. Consequentemente, o valor do **juro** é, também, resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo,** resultando em valores invertidos em relação ao Sistema Francês**.** Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Logo, a afirmação de que ***O fator decisivo para a presença do anatocismo é a definição do critério a ser usado no desdobramento das prestações em suas parcelas de amortização e juros*** é falaciosa; porque, financeiramente, só se permite única separação, como comprovamos e ratificamos, cientificamente. Qualquer outra separação servirá, apenas, para efeito fisco-contábil, sem qualquer sentido financeiro.

Fica patente, então, que se pode considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos – SPCJC (VDT):

Empréstimos		**VALOR DOS JUROS COMPOSTOS MENSAIS**				**Pagamentos**		**Saldo**
Amortização		1	2	3	4	**∑ Juros**	**Prestação**	**Devedor**
0								100.000,00
1	28.679,16	2.867,92				2.867,92	31.547,08	78.452,92
2	26.071,97	2.607,20	2.867,92			5.475,11	31.547,08	54.751,13
3	23.701,79	2.370,18	2.607,20	2.867,92		7.845,29	31.547,08	28.679,16
4	21.547,08	2.154,71	2.370,18	2.607,20	2.867,92	10.000,00	31.547,08	0,00
∑	**100.000,00**	**10.000,00**	**7.845,29**	**5.475,11**	**2.867,92**	**26.188,32**	**126.188,32**	

Então, a insensata afirmação de que ***considerar as prestações do financiamento como a soma de vários financiamentos independentes é uma mera construção teórica, que não faz sentido jurídico-financeiro*** não nos parece crível que tenha origem em renomados professores de matemática financeira. Simples, assim, prezados: toda prestação é valor futuro e ao descapitalizarmos (desincorporarmos os juros), dividindo a prestação pelo fator de capitalização ou multiplicando pelo fator de descapitalização, estamos calculando a parcela de capital (amortização), independentemente do sistema de amortização e do regime de capitalização.

Da mesma forma, a afirmação irrefletida de que o ***Sistema de Prestações Constantes em Juros Composto é a Tabela Price "Distorcida"*** é um contrassenso; porquanto, como demonstrado, cientificamente, é o sistema, financeiramente, correto, diferentemente do Sistema Francês, em que o cálculo dos juros e, por consequência das amortizações, se baseia em uma mera **convenção**, **financeiramente insustentável**; porém, convenhamos**, aceitável em termos contábeis**. O Sistema Francês, sim, poderia ser chamado de distorcido, financeiramente!

Honestamente, o Sistema de Prestação Constante em Juros Compostos (VDT), sim, poderia ser chamado de Price; porquanto, é construído com os mesmos fundamentos com que elaborou suas famosas Tabelas Financeiras. Certamente, Richard Price sentir-se-ia devidamente homenageado, diferentemente, do que usar seu nome em vão, num sistema imperfeito, financeiramente!

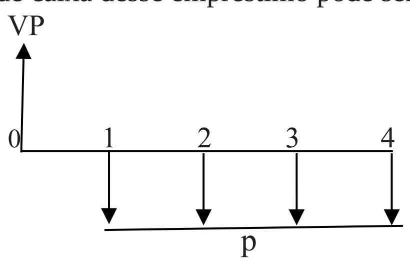
Da mesma forma, a afirmação de que ***O pagamento dos juros tem prioridade sobre o pagamento das amortizações*** evidencia falta de sensatez; porquanto, quando liquidamos uma prestação, estamos pagando, ao mesmo tempo, juros e amortização. Ademais, a legislação jamais terá prioridade sobre a ciência exata da Matemática Financeira: os Sistemas de Amortização que calculam juros sobre o saldo devedor não vão deixar de ser compostos, mesmo que a justiça venha a desejar.

Portanto, senhores negacionistas de uma ciência exata, não há como sustentar, cientificamente, que os sistemas de amortização que calculam juros sobre o saldo devedor anterior não os capitalizam de forma composta. Como demonstramos, basta estudar e explorar a riqueza da fórmula do valor presente série uniforme, em que se verifica a presença de todos os fatores da capitalização composta, para as devidas comprovações científicas.

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE EM JUROS SIMPLES – EQUIVALÊNCIA (VDT)

Adotando como exemplo um empréstimo de $ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, à taxa de juros simples de 10% ao mês, elaborar a planilha de amortização.

O fluxo de caixa desse empréstimo pode ser assim representado:



$$VP = \frac{p}{(1+i\times 1)} + \frac{p}{(1+i\times 2)} + \frac{p}{(1+i\times 3)} + \frac{p}{(1+i\times 4)}$$

Como o valor de p é comum, colocamos em evidência (fatoramos) e obtemos:

$$VP = p \times \left[\frac{1}{(1+i\times 1)} + \frac{1}{(1+i\times 2)} + \frac{1}{(1+i\times 3)} + \frac{1}{(1+i\times 4)} \right]$$

Conclui-se, por conseguinte, que o valor presente e o valor da prestação poderão ser obtidos pela multiplicação do valor da prestação e pela divisão do valor presente (capital), ambos pelo somatório dos fatores de descapitalização em juros compostos, respectivamente::

$$VP = p \times \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i\times j)} \quad \Rightarrow \quad p = VP \div \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{(1+i\times j)}$$

Como se observa, entre colchetes, a soma dos termos não forma nenhum tipo de progressão, tornando-se uma equação irredutível. Portanto, não há como reduzir a uma fórmula: temos, então, que somar todos os fatores de descapitalização para o cálculo do valor atual ou do valor da prestação constante:

$$p = \frac{100.000{,}00}{(0{,}90909 + 0{,}83333 + 0{,}76923 + 0{,}71429)} \quad \Rightarrow \quad \frac{100.000{,}00}{3{,}22594} = 30.998{,}71$$

Nesse referido Sistema de Prestação Constante em Juros Simples, depois de obtido o valor da prestação constante mensal, calculamos a amortização por meio da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização, o juro pela diferença entre a prestação e a respectiva amortização e, por fim, o saldo devedor, pela diferença entre o saldo devedor na data zero (valor do empréstimo) e as amortizações havidas, capitalizando essa diferença até o período desejado, e montamos a planilha:

Considerando que na capitalização simples a data focal, obrigatoriamente, tem que ser a data zero, como anteriormente comprovado, convém realçar que os saldos devedores serão a diferença entre o valor do empréstimo e o valor presente das parcelas pagas, constituindo-se no saldo devedor na data zero, capitalizando essa diferença até a data pretendida, como se comprova:

$$SD_1 = \left[100.000 - \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 1)} \right] \times (1+10\%\times 1) \Rightarrow 79.001{,}29$$

$$SD_2 = \left[100.000 - \left(\frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 1)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 2)} \right) \right] \times (1+10\%\times 2) \Rightarrow 55.184{,}52$$

$$SD_3 = \left[100.000 - \left(\frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 1)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 2)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 3)} \right) \right] \times (1+10\%\times 3) \Rightarrow 28.784{,}52$$

$$SD_4 = \left[100.000 - \left(\frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 1)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 2)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 3)} + \frac{30.998{,}71}{(1+10\%\times 4)} \right) \right] \times (1+10\%\times 4) \Rightarrow 0$$

Depois de ficar clarividente que os saldos devedores contêm juros simples; pois são os montantes dos saldos devedores na data zero, vamos calcular os valores das amortizações efetivamente realizadas, tomando como base esses mesmos saldos devedores.

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da primeira prestação (SD_1), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira amortização. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor será o valor da primeira amortização:

$$A_1 = 100.000 - \frac{79.001{,}29}{(1+10\%\times 1)} \Rightarrow 28.180{,}65$$

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da segunda prestação (SD_2), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira e segunda amortizações. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzindo a primeira amortização (A_1), será o valor da segunda amortização:

$$A_2 = 100.000 - \frac{55.184{,}52}{(1+10\% \times 2)} - 28.180{,}65 \Rightarrow 25.832{,}26$$

Ao descapitalizarmos o saldo devedor depois do pagamento da terceira prestação (SD_3), desincorporando os juros, teremos o saldo devedor na data zero, depois da primeira, segunda e terceira amortizações. Então, o valor da diferença entre o valor do empréstimo e o valor desse novo saldo devedor, deduzindo as amortizações anteriores, será o valor da terceira amortização:

$$A_2 = 100.000 - \frac{28.784{,}52}{(1+10\% \times 3)} - 28.180{,}65 - 25.832{,}26 \Rightarrow 23.845{,}16$$

Como o saldo devedor depois do pagamento da última prestação (SD_4) deve ser zero, o valor da quarta e última amortização será a diferença entre o valor do empréstimo e as amortizações anteriores:

$$A_4 = 100.000 - 28.180{,}65 - 25.832{,}26 - 23.845{,}16 \Rightarrow 22.141{,}93$$

Como comprovamos anteriormente, ficou evidente que o valor dos juros contidos na 1ª prestação é a diferença entre a prestação e a respectiva prestação, descapitalizada em juros simples por 1 período; o valor dos juros contidos na 2ª prestação é a diferença entre a prestação e a respectiva prestação descapitalizada em juros simples por 2 períodos, e assim por diante, como se comprova:

$$J_t = p - \frac{p}{(1+i \times t)}$$

$$J_1 = 30.998{,}71 - \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 1)} \Rightarrow 2.818{,}06$$

$$J_2 = 30.998{,}71 - \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 2)} \Rightarrow 5.166{,}45$$

$$J_3 = 30.998{,}71 - \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 3)} \Rightarrow 7.153{,}55$$

$$J_4 = 30.998{,}71 - \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 8.856{,}77$$

Além disso, aproveitando que todos já devem ter entendido que em qualquer prestação há juro e amortização, exceto pagamento no ato e que, por consequência, juro é a diferença entre prestação e respectiva amortização, a fórmula está nos revelando que p ÷ (1+i x n) é o valor da 4ª (última) amortização; p ÷ [1+i x (n-1)] é o valor da 3ª (penúltima) amortização; p ÷ [1+i x (n-2)] é o valor da 2ª amortização e p ÷ [1+i x (n-3)] é o valor da 1ª amortização, como se comprova:

$$\text{Se } J_t = p - \frac{p}{(1+i \times t)} \text{ e } J_t = p - A_t \therefore A_t = \frac{p}{(1+i \times t)}$$

$$A_1 = \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 1)} \Rightarrow 28.180{,}64$$

$$A_2 = \frac{30.998{,}71}{(1+10\% \times 2)} \Rightarrow 25.832{,}26$$

$$A_3 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 3)} \Rightarrow 23.845,16$$

$$A_4 = \frac{30.998,71}{(1+10\% \times 4)} \Rightarrow 22.141,94$$

Ressalte-se que os juros, também, podem ser calculados sobre o valor de cada amortização, pelos respectivos prazos e taxa, ratificando que podemos considerar como se fossem 4 empréstimos distintos, cujos montante são os valores das prestações, como se comprova:

$$J_1 = 28.180,64 \times 10\% \times 1 \Rightarrow 2.818,06 \therefore M = 28.180,64 + 2.818,06 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_2 = 25.832,26 \times 10\% \times 2 \Rightarrow 5.166,45 \therefore M = 25.832,26 + 5.166,45 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_3 = 23.845,16 \times 10\% \times 3 \Rightarrow 7.153,55 \therefore M = 23.845,16 + 7.153,55 \Rightarrow 30.998,71$$

$$J_4 = 22.141,94 \times 10\% \times 4 \Rightarrow 8.856,77 \therefore M = 22.141,94 + 8.856,77 \Rightarrow 30.998,71$$

Fica muito claro, então, que realizar um único empréstimo, por 4 meses, para liquidar com um pagamento de $ 140.000,00, é o mesmo que realizar 4 empréstimos distintos de $ 28.180,64, $ 25.832,26, 23.845,16 e 22.141,94, para liquidar em 4 parcelas mensais de $ 30.998,71; porquanto, nos dois casos, pagaremos $ 100.000,00 na data focal zero, exigência da capitalização simples, como vimos, exaustivamente.

Em consequência, tendo todos os elementos, revela-se muito simples montar a planilha de amortização desse Sistema de Prestação Constante em Juros Simples - SPCJS (VDT), evidenciando, mais uma vez, que não há prioridade entre juros e amortização; pois, além de serem pagos, concomitantemente, fica a critério de cada um calcular, primeiramente, o juro ou a amortização:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	ORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR
0				100.000,00	
1	30.998,71	2.818,06	28.180,65	79.001,29	0,909091
2	30.998,71	5.166,45	25.832,26	55.184,52	0,833333
3	30.998,71	7.153,55	23.845,16	28.784,52	0,769231
4	30.998,71	8.856,77	22.141,94	0,00	0,714286
∑	**123.994,84**	**23.994,84**	**100.000,00**		**3,225941**

Oportuno constatar que o valor das prestações, somente, pode ser obtido pela divisão do valor do empréstimo pelo somatório dos fatores de descapitalização; porque, na capitalização simples, a equivalência, tem que ser realizada na data zero, obrigatoriamente.

Nota-se, com muita facilidade, que o valor de cada **amortização** é, também, **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**. Consequentemente, o valor do **juro** é, também, resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**. Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Fica patente, então, que se pode considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Simples – SPCJS (VDT):

Empréstimos		VALOR DOS JUROS COMPOSTOS MENSAIS				Pagamentos		Saldo
Amortização		1	2	3	4	∑ Juros	Prestação	Devedor
0								100.000,00
1	28.679,16	2.867,92				2.867,92	31.547,08	78.452,92
2	26.071,97	2.607,20	2.867,92			5.475,11	31.547,08	54.751,13
3	23.701,79	2.370,18	2.607,20	2.867,92		7.845,29	31.547,08	28.679,16
4	21.547,08	2.154,71	2.370,18	2.607,20	2.867,92	10.000,00	31.547,08	0,00
∑	**100.000,00**	**10.000,00**	**7.845,29**	**5.475,11**	**2.867,92**	**26.188,32**	**126.188,32**	

Como se constata, os juros são calculados apenas sobre o principal de cada empréstimo (valor presente = capital), sendo iguais em cada período, caracterizando, de forma clarividente, a não presença do anatocismo: juros sobre juros.

Então, a insensata afirmação de que ***considerar as prestações do financiamento como a soma de vários financiamentos independentes é uma mera construção teórica, que não faz sentido jurídico-financeiro*** não nos parece crível que tenha tido origem em renomados professores de matemática financeira. Simples, assim, prezados negacionistas: toda prestação é valor futuro e ao descapitalizarmos (desincorporarmos os juros), dividindo a prestação pelo fator de capitalização ou multiplicando pelo fator de descapitalização, estamos calculando a parcela de capital (valor presente =amortização), independentemente do sistema de amortização e do regime de capitalização.

SISTEMA DE PRESTAÇÃO CONSTANTE EM JUROS SIMPLES – MÉTODO DE GAUSS

Aproveitando a oportunidade, cabe destacar que o dito **Método de Gauss**, conhecido também como Método Linear Ponderado, **pretensamente** desenvolvido no regime de juros simples; porém, com a equivalência sendo, **equivocadamente**, realizada na data do valor futuro (n), para liquidação de operações por meio de pagamentos periódicos e iguais, resultado do somatório dos encargos financeiros (juros) e da parcela de capital (amortização), que é crescente em progressão aritmética, com o intuito de substituir o SPC em Juros Compostos − Price, com a amortização crescente em progressão geométrica.

Adotando como exemplo um empréstimo de \$ 100.000,00, a ser liquidado em quatro prestações mensais e iguais, à taxa de juros simples de 10% ao mês, depois de calcular o valor da prestação, com a equivalência na data focal final 4 (n), elaborar a planilha de amortização.

$$100.000 \times (1+10\% \times 4) = p \times (1+10\% \times 3) + p \times (1+10\% \times 2) + p \times (1+10\% \times 1) + p$$

$$100.000 \times (1+10\% \times 4) = p \times [(1+10\% \times 3) + (1+10\% \times 2) + (1+10\% \times 1) + 1] \Rightarrow p = \frac{140.000}{4,60} \Rightarrow 30.434,78$$

Em consequência, revela-se muito simples montar a planilha de amortização desse Sistema de Prestação Constante em Juros Simples – Método de Gauss, evidenciando, mais uma vez, que a equivalência no regime de juros simples, obrigatoriamente, deverá ser realizada na data focal zero; porquanto, em qualquer outra data, no caso desse método na data final (n), a taxa incidirá sobre montantes, caracterizando juros sobre juros, como já comprovamos, pormenorizada e cientificamente:

n	PRESTAÇÃO	JUROS	AMORTIZAÇÃO	S DEVEDOR	FATOR JS
0				100.000,00	
1	30.434,78	2.766,80	27.667,98	79.565,22	0,909091
2	30.434,78	5.072,46	25.362,32	56.363,64	0,833333
3	30.434,78	7.023,41	23.411,37	30.625,82	0,769231
4	30.434,78	8.695,65	21.739,13	2.546,87	0,714286
∑	**121.739,13**	**23.558,33**	**98.180,80**		**3,225941**

Como se verifica, essas quatro prestações postecipadas mensais e iguais, quando descapitalizadas a juros simples de 10% ao ano, até à data zero, não são equivalentes a \$ 100.000,00, restando saldo a pagar no valor de \$ 2.546,87, **ratificando que o empréstimo não foi realizado no regime de juros simples**. Como existem apenas dois regimes de capitalização, mutuamente excludentes, certamente, foi realizado no regime de juro composto.

Nota-se, com muita facilidade, que o valor de cada **amortização (capital),** como em todos os sistemas**,** é **resultado da multiplicação do valor da prestação pelo respectivo fator de descapitalização**. Consequentemente, o valor do **juro simples** é resultado da **multiplicação da taxa pelo valor da respectiva amortização e prazo**. Por óbvio, não se trata de meras coincidências e, sim, de pura matemática financeira, como comprovamos, exaustivamente!

Fica patente, então, que se pode considerar como se fossem quatro empréstimos distintos, cujos montantes são os valores das prestações do Sistema de Prestação Constante em Juros Simples – Método de Gauss:

Empréstimos		VALOR DOS JUROS SIMPLES MENSAIS				Pagamentos		Saldo
Amortização		1	2	3	4	∑ Juros	Prestação	Devedor
0								100.000,00
1	27.667,98	2.766,80				2.766,80	30.434,78	79.565,22
2	25.362,32	2.536,23	2.536,23			5.072,46	30.434,78	56.363,64
3	23.411,37	2.341,14	2.341,14	2.341,14		7.023,41	30.434,78	30.625,82
4	21.739,13	2.173,91	2.173,91	2.173,91	2.173,91	8.695,65	30.434,78	2.546,87
∑	**98.180,80**	**9.818,08**	**7.051,28**	**4.515,05**	**2.173,91**	**23.558,33**	**121.739,13**	

Como se verifica, o valor presente das quatro parcelas totaliza $ 98.180,00, soma das amortizações, restando saldo a pagar de $ 1.819,20 na data zero que, capitalizados a juros simples de 10% ao mês, corresponderá, na data final quatro, a $ 2.546,87.

Diante disso, conclui-se que o dito **Método de Gauss não exprime consistência científica** ao não cumprir condição fundamental de um sistema de amortização: liquidar integralmente o valor do empréstimo; devendo, portanto, ser descartado, **peremptoriamente**.

É muito importante enfatizar que convenções para separar juros e amortizações, ignorando o valor do dinheiro no tempo, independentemente de seus valores, servem apenas para efeito fisco-contábil; porquanto, os juros efetivamente pagos estão contidos nas prestações e as amortizações efetivamente realizadas, além de contidas nas prestações, estão consideradas nos saldos devedores, como exaustivamente demonstrado e comprovado.

Portanto, senhores negacionistas, insistir que os sistemas de amortização que calculam juros sobre os saldos devedores são simples; com o equivocado e absurdo argumento de que, ao liquidarmos as prestações estaríamos pagando todo o juro e, por consequência, não restariam juros nesses saldos devedores e/ou que o Método de Gauss capitaliza juros simples, saltam aos olhos duas únicas alternativas: ou se trata de ignorância financeira ou de desonestidade intelectual. Certamente, depois de todas as comprovações científicas, detalhadamente demonstradas, restará uma única alternativa, caso a negação à ciência exata da Matemática Financeira persista!

Finalizando, seria muito oportuno que as instituições financeiras utilizassem os sistemas de amortização apenas para calcular o valor das prestações que liquidarão os empréstimos/financiamentos e os saldos devedores, destacando em contrato, e deixassem a separação da prestação em juros e amortização para as autoridades fisco-contábeis; principalmente no SFH, em que as pessoas físicas não abatem os juros como despesas para efeito de IR e são isentas de IOF.

Eu, como professor de matemática financeira, há quase meio século, enquanto ciência exata que trata do valor do dinheiro no tempo, tenho o **dever de zelar pelo rigor científico**.

Parafraseando Albert Einstein, a Matemática Financeira, enquanto ciência exata, não mente!